

BAB II. REPRESENTASI SEBAGAI SALAH BENTUK AKTIVITAS MENTAL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA

**Iwan Junaedi^{1,a}, Amidi^{1,b}, Muh. Sholeh^{2,c},
dan Ardhi Prabowo^{1,3,d}**

¹Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Negeri Semarang

²Jurusan Geografi FIS, Universitas Negeri Semarang

³Mahasiswa Program Doktor Pendidikan Matematika UPI

iwanjun@gmail.com^a, amidiunnes@gmail.com^b,

muh.5eh@gmail.com^c, ardhi@upi.edu^d

DOI: <https://doi.org/10.1529/kp.v1i2.42>

Abstrak

Representasi matematika adalah interpretasi pemikiran siswa terhadap suatu masalah untuk membantu menemukan solusinya yang dapat berupa kata/verbal, tulisan, gambar, grafik, tabel, simbol dan lain sebagainya. Mahasiswa calon pendidik matematika perlu menguasai kemampuan membangun representasi siswa dengan berbagai aktivitas dan lembar kerja yang mendorong siswa untuk melakukan. Pada bab ini, dijelaskan representasi pada tingkat mahasiswa, dan kemudian dilanjutkan dengan kajian representasi matematika di sekolah. Ada tiga representasi matematis yang dijelaskan, yaitu: (1) representasi bahasa, menerjemahkan benda yang diamati dan berhubungan dengan masalah matematika menjadi representasi verbal atau lisan; (2) representasi grafik atau gambar, keterampilan menerjemahkan masalah matematika menjadi gambar atau grafis; dan (3) representasi simbol aritmatika, keterampilan menerjemahkan masalah ke dalam representasi rumus aritmatika. Kemampuan representasi adalah salah satu ketrampilan dasar berpikir matematis. Berbagai contoh lembar kerja siswa yang mendorong siswa berpikir representatif di sajikan di akhir bab ini. Contoh tersebut diharapkan dapat menginspirasi mahasiswa calon pendidik dalam membangun lembar kerja siswa.

Kata Kunci: Representasi, Pembelajaran, Matematika

PENDAHULUAN

Aktivitas bagaimana individu memperoleh informasi, bagaimana informasi tersebut direpresentasikan dan ditransformasi menjadi pengetahuan, bagaimana bagaimana pengetahuan itu disimpan menjadi ingatan yang selanjutnya dimunculkan kembali, dan bagaimana pengetahuan tersebut digunakan untuk mengambil tindakan atau keputusan, kesemuanya itu merupakan aktivitas mental atau aktivitas berpikir atau proses berpikir. Proses mental atau proses berpikir merupakan proses yang digunakan manusia untuk belajar memperoleh pengetahuan dengan memahami dan mengkonseptualisasikan situasi masalah, membuat hipotesis dan bagaimana memecahkan masalah, mengontrol dan memperbaiki proses pemecahan masalah (Encyclopedia of the Sciences of Learning, diunduh November, 2021).

Salah satu aktivitas mental adalah representasi. Mengapa representasi ini menarik untuk dikaji sebagai bagian dalam mendesain pembelajaran?. Untuk memulai representasi ini penulis mencoba mengingat pada masa-masa kecil atau hasil pengamatan sederhana pada anak-anak yang masih pada tahapan perkembangan mental pra operasional versi Piaget. Bagaimana anak pada tahapan tersebut dalam menulis simbol bilangan 3 banyak yang terbalik dengan simbol ε (angka 3 terbalik). Mengapa ini terjadi?

Ya, representasi simbol bilangan 3 (angka 3) bagi orang tua dan anak usia pra operasional bisa jadi tidak memiliki kesamaan. Orang tua melihat angka 3, merupakan sebuah simbol dari suatu bilangan, sementara bagi anak pada tahapan pra operasional merupakan benda geometris dari sebuah kurva terbuka yang tidak dimaknai sebagai bilangan 3. Contoh tersebut merupakan salah satu contoh sederhana pada individu pada tahapan pra operasional. Persoalannya adalah bagaimana individu dewasa atau dewasa dalam melakukan representasi terhadap suatu pengetahuan?

PEMBAHASAN

a. Representasi Matematis

Representasi didefinisikan secara sederhana oleh Mainali (2021) sebagai tanda atau kombinasi dari tanda-tanda, karakter, diagram, objek, gambar, atau grafik. Lebih luar dari definisi tersebut bahwa representasi melibatkan penerjemahan masalah atau bentuk baru, penerjemahan diagram atau model fisik ke dalam simbol atau kata-kata, representasi juga digunakan dalam menerjemahkan atau menganalisis masalah verbal untuk memperjelas makna (NCTM, 2000). Sementara itu Goldin (2002) mendefinisikan lebih rinci sebagai suatu konfigurasi (bentuk atau susunan) yang dapat menggambarkan, mewakili, atau melambangkan sesuatu dalam suatu cara yang dikategorikan menjadi dua tahap yaitu representasi representasi internal dan representasi eksternal.

Representasi internal adalah proses berpikir tentang ide-ide matematika yang terjadi dalam pikiran individu seseorang yang bekerja atas dasar ide tersebut. Proses representasi internal ini merupakan aktivitas mental seseorang dalam pikirannya (*minds on*) yang tidak dapat diamati dengan indera mata dan tidak dapat dinilai. Sebagai contoh apa yang dipikirkan oleh seorang individu mengenai garis sebagai himpunan titik-titik tak kosong, tentu orang lain tidak bisa membayangkan apa yang terjadi dalam pikiran individu tersebut tentang titik dan garis. Contoh sederhana yang lain adalah bagaimana pikiran seseorang dalam menggambarkan alas dari bangun sebuah segitiga, bisa jadi pikiran seorang individu tersebut dalam memaknai alas dari bangun segitiga tidak sama dengan inividu yang lain.. Secara umum konsep-konsep yang terjadi dalam pikiran (*mains on*) seseorang tidak bisa diamati dengan indera.

Apa yang ada dalam pikiran seseorang bisa diketahui setelah di-representasi seacara eksternal atau *hand on*. Reperesentasi eksternal merupakan bentuk-bentuk pikirn yang dapat diungkap baik secara lisan, tulisan, simbol, ekspresi, gambar, grafik, diagram, tabel atau melalui objek fisik berupa alat peraga. Sebagai contoh secara representasi internal tetang titik dan garis, secara

representasi eksternal ada seseorang yang memahami titik dan garis hanya dengan menggambar dua buah titik kemudian dihubungkan dengan ruas garis, sementara mungkin orang lain secara representasi eksternal mungkin bisa diwujudkan dengan bentuk persamaan garis atau dengan gradien. sebuah garis.

b. Representasi dalam Pembelajaran

Belajar merupakan suatu aktivitas mental. Aktivitas tersebut diharapkan dapat memberikan perubahan pada diri seseorang individu yang dapat berupa pengetahuan, sikap, atau keterampilan yang disebut dengan hasil belajar. Untuk mempermudah individu dalam belajar diperlukan pembelajaran. Pembelajaran adalah cara yang digunakan untuk memfasilitasi individu dalam proses belajar melalui pengalaman yang bermakna. Pembelajaran akan bermakna jika pada diri siswa dapat menerapkan pengetahuan, sikap, atau keterampilan yang diperoleh dalam kehidupan sehari-hari untuk hidup yang lebih baik.

Permasalahannya adalah bagaimana cara agar guru dapat membelajarkan siswa secara efektif dan efisien? Dalam pembelajaran matematika Zevenbergen (2006) mengatakan bahwa agar guru dapat mengajar matematika dengan efektif, guru harus mengetahui bagaimana cara siswa belajar matematika. Pengetahuan tentang cara-cara peserta didik belajar diperlukan ilmu pengetahuan. Ilmu pengetahuan yang mengkaji tentang bagaimana siswa belajar dikenal dengan teori belajar atau psikologi pembelajaran. Dalam konteks belajar matematika, Orthon (2004) menyatakan bahwa teori pembelajaran matematika sangat diperlukan oleh guru ketika mengajar matematika di kelas.

Salah satu aspek yang dikaji dalam teori pembelajaran matematika adalah representasi. Menurut Kalathil dan Sherin (2000), representasi dapat digunakan untuk: (1) memberikan informasi kepada pendidik (guru) dan siswa tentang bagaimana seorang siswa memikirkan masalah, (2) memberikan informasi tentang pola dan kecenderungan siswa dalam memecahkan masalah matematis, dan (3) digunakan sebagai alat bagi guru dan

siswa untuk menggali gagasan dalam memecahkan masalah matematika.

Dalam matematika, representasi ekternal seseorang dapat berupa visual, ekspresi matematik, atau representasi dengan kata-kata. Representasi visual misalnya bagaimana seseorang mengungkapkan ide-idenya melalui gambar, simbol, tabel, grafik, diagram, dan sebagainya. Representasi ekternal yang termasuk dalam ekspresi matematis, misalnya membuat persamaan, model matematis, kalimat matematika, dan sebagainya. Representasi ekternal dalam bentuk kata-kata atau teks tertulis, misalnya menuliskan simpulan atau makna dari suatu representasi suatu objek matematika, atau hasil dari suatu solusi masalah.

Pengetahuan guru tentang representasi matematis sangat diperlukan dalam memberikan dan memfasilitasi pengalaman belajar siswa. Pengetahuan yang baik tentang representasi akan memudahkan guru dalam membelajarkan siswanya.

c. Pendekatan Representasi Visual untuk Representasi Ekspresi Matematis

Bagaimana orang dewasa dalam melakukan representasi terhadap suatu objek atau konsep? Sudah barang tentu orang dewasa sudah tidak akan terbalik lagi dalam menuliskan simbol bilangan 3 menjadi simbol ε (angka 3 terbalik), atau terbalik dalam menuliskan “huruf b dengan huruf d”. Pertanyaanya apakah orang dewasa masih memerlukan representasi sebagaimana pada anak yang masih dalam tahap pra oprofesional yang kadang keliru dalam menuliskan simbol bilangan atau huruf?

Tentu saja orang dewasa meskipun tahapan tingkat berfikirnya lebih tinggi dibanding anak yang belum dewasa, bisa jadi representasi internal dan representasi eksternal dari masing-masing individu tidak sama. Hal ini karena tingkat kerumitan dan kekomplekskan dari suatu konsep. Representasi internal dan eksternal yang tidak sama dari suatu individu terjadi karena mungkin pengetahuan prasyarat dalam memahami suatu konsep yang lebih tinggi memerlukan sejumlah prasyarat atau konsep pendukung. .

Contoh 1:

Berikut contoh memahami sebuah konsep matematika khususnya kalkulus, di mana belum tentu setiap individu memiliki representasi yang sama tentang definisi pengertian limit secara intuitif. Dalam definisi tersebut disebutkan bahwa “Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ berarti bahwa *bilamana x dekat tetapi berlainan dari c maka f(x) dekat ke L*.”

Bagaimana representasi dari kalimat “ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ yang berarti *bilamana x dekat tetapi berlainan dari c, maka f(x) dekat ke L*”?

Ekspresi matematis untuk “kalimat $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ yang berarti *bilamana x dekat tetapi berlainan dari c, maka f(x) dekat ke L*” mungkin untuk individu yang berbeda memahami konsep tersebut secara internal bisa berbeda.

Bisa jadi ada individu yang sudah merasa sudah cukup dengan contoh pertanyaan hitunglah:

$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 4) = \dots$. Di mana jawaban dari contoh tersebut tidaklah sulit karena hanya dengan mengganti variabel x dengan 3, akan diperoleh jawaban $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 4) = \lim_{x \rightarrow 3} (2 \cdot 3 - 4) = 2$.

Dari jawaban tersebut bermakna bahwa untuk $f(x) = 2x - 4$, *untuk x dekat tetapi berlainan dengan 3 maka f(x) dekat ke 2*.

Pertanyaannya adalah apakah orang atau individu tersebut sudah cukup memaknai representasi internal untuk $f(x) = 2x - 4$, *untuk x dekat tetapi berlainan dengan 3 maka f(x) dekat dengan 2* sama dengan representasi eksternalnya? Contoh 2 berikut mungkin bisa mematahkan bahwa tidak cukup hanya *untuk x dekat tetapi berlainan dengan 3 maka f(x) dekat ke 2*.

Contoh 2:

Contoh berikut berbeda dengan contoh 1.

Misalkan $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-2x-8}{x-4} = \dots$

Untuk merepresentasikan $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-2x-8}{x-4} = \dots$, di mana untuk x dekat tetapi berlainan dengan 4 maka $f(x) = \frac{x^2-2x-8}{x-4}$ dekat dengan suatu bilangan L , tentunya berbeda dengan contoh 1, karena tidak begitu saja mengganti variabel x dengan 4 sedemikian hingga

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-2x-8}{4-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-2x-8}{0}$$

Bisa jadi ada individu atau seseorang memiliki representasi internal berbeda dengan hasil yang seharusnya. Bisa jadi individu tersebut akan mengatakan secara eksternal representasi bahwa $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-2x-8}{x-4}$ tidak terdefinisi untuk $x = 4$, karena pembaginya menjadi 0 (nol) atau individu tersebut akan mengatakan bahwa $f(x)$ tidak mempunyai limit untuk $x \rightarrow 4$.

Iniilah pentingnya representasi eksternal sedemikian hingga bisa diketahui bahwa representasi internal seseorang atau apa yang ada dalam pikiran seseorang tidak sama dengan yang seharusnya. Padahal sesungguhnya $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-2x-8}{x-4} = \dots$ mempunyai limit jika dilakukan manipulasi, sehingga pernyataan $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-2x-8}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+2)(x-4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} x + 2 = 4 + 2 = 6$.

Sekarang kita bisa mengatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-2x-8}{x-4} = 6$ di mana untuk x dekat tetapi berlainan dengan 4 maka $f(x) = \frac{x^2-2x-8}{x-4}$ dekat dengan 6. Pertanyaannya adalah apakah manipulasi sebagai mana contoh 2 selalu dapat dilakukan? Contoh tiga berikut merupakan contoh bantuan representasi visual untuk contoh sebuah ekspresi matematik.

Contoh 3:

Bagaimana representasi untuk $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$?

Permasalahannya adalah apakah variabel x bisa diganti dengan 0 sebagaimana contoh sebelumnya atau melakukan manipulasi seperti contoh 2? Bisa jadi ada seseorang yang representasinya internalnya berbeda dengan yang seharusnya, sedemikian hingga dalam representasi eksternal akan menyatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$, yang bermakna bahwa $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, untuk x dekat ke 0 tidak mempunyai limit.

Representasi eksternal visual mungkin bisa membantu terhadap permasalahan berupa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, antara lain dengan menggunakan alat bantu hitung. Meskipun bisa jadi mesin hitung akan menjawab dengan respon "error" jika memasukan variabel x dengan 0, atau menuliskan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 0}{0}$.

Eksternal representasi visual dengan alat hitung dengan mencoba-coba mengganti variabel x tidak dengan 0 (nol) mungkin dapat membantu berupa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \dots$? Dengan mencoba beberapa bilangan yang dekat ke nol (0), diperoleh hasil berikut.

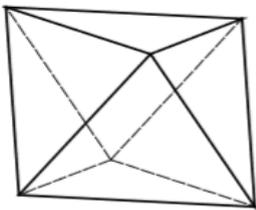
Tabel 2.1. Representasi Nilai

x	$\frac{\sin x}{x}$
1.0	0.84147
0.5	0.95885
0.1	0.99833
0.001	0.99998
↓	↓
0	?
↑	↑
-0.01	0.99998
-0.1	0.99833
-0.5	0.95885
-1.0	0.84147

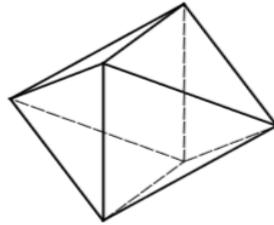
Dari hasil perhitungan mesin hitung, apakah dapat diperoleh kesimpulan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$? Tentunya belum bisa diyakini bukan? Bantuan fungsi trigonometri akan lebih membantu bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Contoh 4:

Perhatikan dua gambar berikut ini!



Gambar a. Bangun Geometri 1



Gambar b. Bangun Geometri 2

Gambar 2.1. Bangun Geometri

Permasalahannya adalah apakah representasi internal dari beberapa individu akan memiliki kesamaan atau tidak pada saat melihat gambar a dan b di atas. Untuk mengetahui apakah ada kesamaan atau perbedaan representasi terhadap dua gambar di atas mungkin bisa dibantu dengan pertanyaan-pertanyaan berikut (1) apakah ada perbedaan antara gambar 1a dan gambar 2b, (2) apakah gambar tersebut merupakan gambar bangun ruang atau bangun datar, (3) apakah jumlah titik-titik sudut pada dua gambar tersebut sama atau berbeda, atau pertanyaan lainnya.

Untuk mengetahui apakah representasi internal terhadap kedua gambar di atas sama dengan representasi eksternal mungkin dapat disajikan benda konkrit (bukan gambar) yang bersesuaian dengan gambar bangun di atas. Contoh tersebut menunjukkan bahwa objek-objek geometri merupakan objek yang abstrak. Objek yang dimaksud merupakan benda-benda yang ada dalam pikiran.

Dalam konsep geometri klasik, kajian geometri dimulai dari titik, garis dan bidang. Semua objek dalam geometri dikonstruksi oleh titik, sedemikian hingga jika sebagian orang merepresentasi apakah titik itu, maka di antara jawabannya adalah titik adalah merupakan noktah, titik dianggap memiliki ukuran meskipun ukurannya kecil, dan sebagainya.

Representasi internal maupun eksternal bahwa titik sebagai benda yang dianggap memiliki ukuran meskipun ukurannya kecil tentulah tidak benar. Karena sesungguhnya titik tidak memiliki ukuran, baik panjang, lebar maupun tinggi. Pada tingkat formal penjelasan objek-objek geometri sudah barang tentu dimulai dari unsur-unsur yang tak terdefinisi, aksioma, definisi, teorema, dan konsep-konsep lainnya. Namun demikian jika masih terdapat kesulitan dalam memahami konsep yang abstrak, maka contoh-contoh semi abstrak seperti gambar-gambar sebagai representasi bisa membantu.

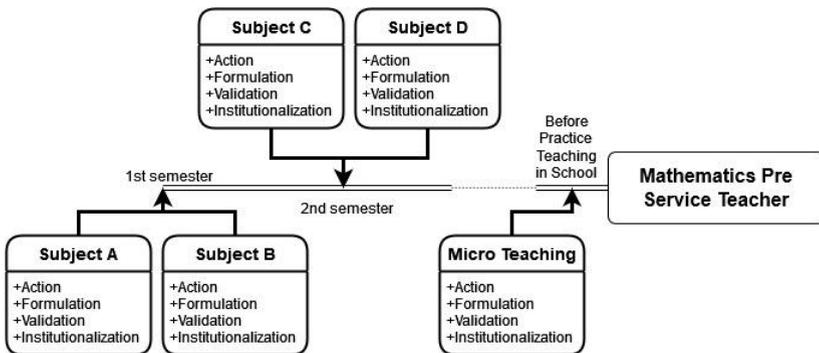
REPRESENTASI MATEMATIKA DI SEKOLAH

Pengetahuan yang epistemic dibangun melalui tahapan perceptual, memorial, introspective, dan apriori (Audi, 2011). Pada tahap perceptual, seseorang yang belajar akan menggunakan indra untuk memahami hal baru. Dari pengetahuan perceptual tersebut, orang kemudian akan membandingkan dengan pengetahuan yang telah dimilikinya, yang berarti ia telah memasuki tahapan memorial. Tahap perceptual dan kemudian memorial akan menghasilkan pemahaman atas pengetahuan baru, menurut persepsi orang. Untuk mengklarifikasi apakah pemahaman atas pengetahuan baru tersebut benar, maka perlu dibandingkan dengan pemahaman orang lain pada tahap introspective. Pengetahuan yang dihasilkan pada tahap introspective berarti sudah tervalidasi dan diakhiri dengan generalisasi pada tahap apriori.

Salah satu paradigma membangun pengetahuan secara epistemic adalah teori didactical situation (TDS) (Suryadi, 2019, 2021). Dalam pandangan TDS pengetahuan dibangun melalui tahap belajar aksi, formulasi, validasi, dan institusionalisasi

(Brousseau, 2002; Suryadi, 2019). Tahap Aksi bermakna segala aktivitas yang dilakukan untuk mencapai pengetahuan. Tahap Aksi dapat berupa aktifitas seseorang yang terkait dengan perceptual maupun memorial. Tahap formulasi merupakan tahap selanjutnya dari aktivitas yang dilakukan pada aksi. Pengetahuan yang terbentuk pada tahap ini masih bersifat personal. Oleh sebab itu, pengetahuan perlu dibandingkan dengan pengetahuan lain pada tahap validasi. Pada tahap ini, orang akan melakukan diskusi dengan orang lain yang sedang belajar maupun telah menguasai pengetahuan yang terbentuk. Tahap institusionalisasi merupakan generalisasi dan menghilangkan hal-hal khusus dari pengetahuan yang terbentuk. Tahap institusionalisasi ditandai dengan implementasi pengetahuan baru.

Dalam konteks menghasilkan calon guru matematika, proses aksi, formulasi, validasi, dan institusionalisasi berjalan dalam waktu yang Panjang. Mahasiswa calon guru harus menempuh lebih dari 15 mata kuliah Pendidikan Matematika sebelum melakukan praktik mengajar di sekolah. Setiap mata kuliah membentuk pengetahuan yang jika digabungkan akan terbentuk pengetahuan baru sebagai calon guru matematika. Proses pembentukan pengetahuan berjalan pada setiap matakuliah, dan didalam masing-masing proses tersebut, terdapat tahap aksi, formulasi, validasi, dan institusionalisasi dan menghasilkan potongan pengetahuan. Proses pembentukan mahasiswa calon guru dapat dilihat pada gambar 1.



Gambar 2.2. Diagram Proses Menjadi Calon Guru Matematika

Menjadi seorang calon guru matematika, hakikatnya harus menguasai 3 hal utama, yaitu perencanaan, pelaksanaan, dan evaluasi pembelajaran. Dari ketiga hal tersebut, yang paling utama dan menjadi salah satu kriteria penilaian dalam praktik mengajar di sekolah adalah perencanaan pembelajaran. Di dalam perencanaan pembelajaran, secara tersirat terkandung aktivitas penyusunan HLT dan formative assessment (Clements, 2011; Gee et al., 2018; Sztajn et al., 2012). Aktivitas penyusunan rencana pembelajaran juga dapat menggambarkan sejauh mana seorang mahasiswa calon guru matematika menguasai pengetahuan tentang menjadi guru. Memahami proses pembentukan calon guru matematika dalam pandangan TDS ini penting karena akan dapat mengidentifikasi kebenaran urutan mata kuliah serta struktur mata kuliah tersebut dalam kurikulum Pendidikan calon guru matematika.

Proses perkuliahan pada mata kuliah matematika di LPTK seringkali menginspirasi guru tentang situasi pembelajaran matematika di dalam kelas. Guru matematika yang selama kuliah mendapatkan pengalaman kuliah dengan menggunakan model konvensional akan secara tidak langsung meniru model tersebut untuk digunakan pada kelasnya, demikian pula sebaliknya, guru yang memiliki pengalaman belajar matematika menyenangkan akan berusaha untuk membuat kelasnya juga menyenangkan.

Jika guru diarahkan untuk mengembangkan keterampilan-keterampilan matematis peserta didiknya, maka guru juga perlu diperkaya dengan pengalaman-pengalaman belajar yang menumbuhkan keterampilan tersebut saat mereka duduk di bangku kuliah. Keterampilan matematis dapat dikembangkan melalui serangkaian proses matematis. Proses matematis yang mendasar adalah proses abstraksi, yaitu proses membentuk pengetahuan baru. Terkait dengan hal tersebut, para dosen di LPTK perlu diberikan wawasan dan kemampuan untuk mengembangkan keterampilan matematis melalui proses abstraksi agar dapat memberikan pengalaman yang kaya bagi mahasiswa calon guru matematika dalam belajar konsep matematika.

Sabandar (dalam Surya, 2013) menyatakan bahwa peningkatan dalam kemampuan representasi matematis, guru

melalui proses penemuan dengan menggunakan konsep *mathematization horizontal* dan *vertical*. Konsep bentuk *mathematization horizontal* dari identifikasi masalah visualisasi melalui sketsa atau gambar yang telah diketahui siswa. Konsep *mathematization vertical* adalah representasi dari hubungan bentuk, perombakan dan penyesuaian model matematika, penggunaan model yang berbeda dan generalisasi.

Menurut Hwang et al (2007) terdapat tiga tingkatan representasi pemecahan masalah matematika:

- Kemampuan representasi bahasa, menerjemahkan benda yang diamati dan berhubungan dengan masalah matematika menjadi representasi verbal atau lisan.
- Kemampuan representasi grafik atau gambar, keterampilan menerjemahkan masalah matematika menjadi gambar atau grafis.
- Kemampuan representasi simbol aritmatika, keterampilan menerjemahkan masalah ke dalam representasi rumus aritmatika.

Dapat disimpulkan bahwa representasi matematika di sekolah adalah interpretasi pemikiran siswa terhadap suatu masalah untuk membantu menemukan solusinya yang dapat berupa kata/verbal, tulisan, gambar, grafik, tabel, simbol dan lain sebagainya. Mahasiswa calon guru matematika perlu menguasai kemampuan membangun representasi siswa dengan berbagai aktivitas dan lembar kerja yang mendorong siswa untuk melakukan.

PENUTUP

Duval (dalam Mainali, 2021), menyatakan bahwa tidak ada pengetahuan yang dapat dimobilisasi oleh seorang individu tanpa aktivitas representasi. Penggunaan representasi dalam pembelajaran matematika merupakan hal yang penting dalam pembelajaran matematika. Karena itu, sebagai salah satu aspek kajian dalam psikologi kognitif, representasi memiliki peran penting dalam pengembangan teori belajar matematika.

Representasi merupakan alat untuk manipulasi dan komunikasi, dan juga alat untuk pemahaman konsep yang terkait dengan ide-ide matematika.

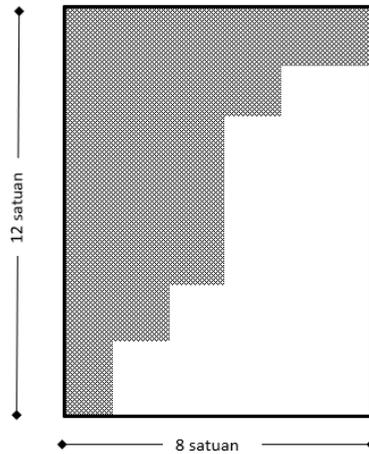
B. APLIKASI REPRESENTASI DALAM LEMBAR KERJA SISWA

Contoh 1: Berapakah kelilingnya?

Ingat bahwa:

Keliling adalah jumlah Panjang seluruh sisi bangun datar.

Hitunglah keliling bangun datar yang diarsir berikut ini!

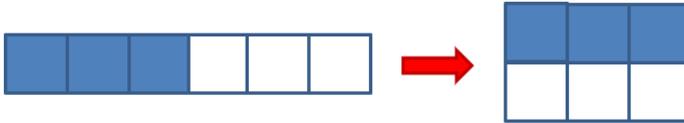


Pembahasan: Pada contoh 1, siswa diminta untuk merepresentasikan grafik dan sekaligus konsep keliling bangun datar. Siswa akan menemukan bahwa daerah yang diarsir tersebut tidak mempengaruhi ukuran keliling bangun datar. Bentuk kelilingnya berbeda, namun besar kelilingnya sama.

Contoh 2: Menemukan Luas Daerah Segitiga

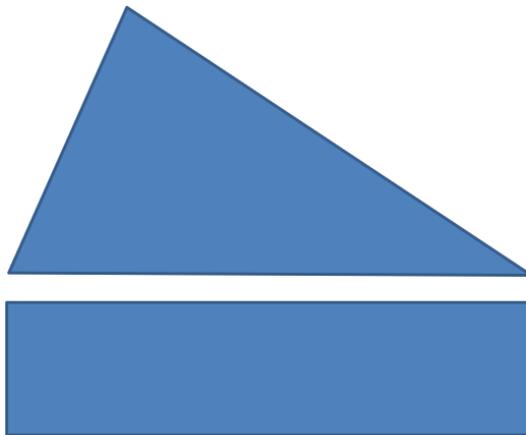
Perhatikan!

Sebuah bangun datar, dengan memotong dan mengiris dapat menjadi bangun datar bentuk lain yang luas daerahnya sama. Perhatikan gambar berikut!



Diskusikan!

Diberikan segitiga dan persegi Panjang yang luas daerahnya sama, seperti berikut!



1. Bagaimana cara memotong dan menempel Segitiga agar bisa tepat menjadi persegi Panjang?
2. Apa yang kalian temukan?

Pembahasan: Pada contoh 2, siswa diminta untuk merepresentasikan gambar menjadi sebuah makna. Pada bagian informasi siswa akan merepresentasikan bahwa bangun datar dapat menjadi bangun datar bentuk lain yang luas daerahnya sama. Dengan representasinya tersebut ia akan mengubah segitiga menjadi persegi panjang.

Contoh 3: Menemukan Luas Permukaan Bola

Perhatikan!

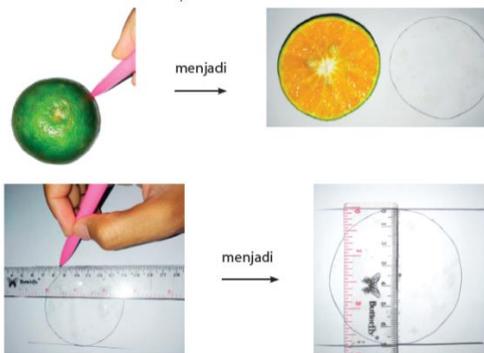
Untuk mengetahui luas permukaan benda atau bangun ruang sisi lengkung, kalian membungkus dengan kertas, lalu meletakkannya di bidang datar. Luas permukaan bangun ruang sisi lengkung tersebut dapat diketahui dari luas daerah bangun datar yang terbentuk.

Mari mengukur permukaan bola dengan jeruk!

Potong buah jeruk menjadi dua bagian sama besar. Usahakan potongan tepat di bagian tengah buah! Hati-hati saat menggunakan pisau.



Baliklah potongan jeruk untuk menggambar lingkaran! Pilih satu permukaan yang mempunyai diameter sama dengan buah jeruk. Buatlah dua garis sejajar pada tepi lingkaran. Hal ini untuk menentukan titik pusat.



Kupaslah kulit jeruk dan potong kecil-kecil.



Tempelkan potongan kulit tersebut pada lingkaran. Tempel dengan rapih dan rapat. Pastikan semua potongan kulit jeruk

tertempel semua tanpa ada yang tersisa. Jika 1 lingkaran masih kurang, Anda dipersilakan membuat lingkaran yang sama!

Tugas Berpasangan

1. Berapa lingkarankah yang kalian buat agar seluruh kulit jeruk tertempel?
2. Apa yang kalian temukan?

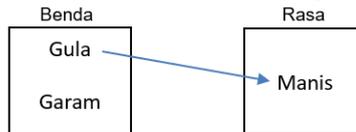
Pembahasan: Pertanyaan “Apa yang kamu temukan?” adalah representasi dari pengetahuan baru yang dihasilkan. Siswa akan mampu menjawab hal baru berdasarkan pengetahuan yang sudah terbentuk tersebut.

Contoh 4: Memahami Konsep Relasi

Perhatikan!

Anggota suatu himpunan dapat dipasangkan dengan anggota himpunan lain dengan aturan tertentu.

Perhatikan hubungan antara benda dan rasa pada contoh berikut!

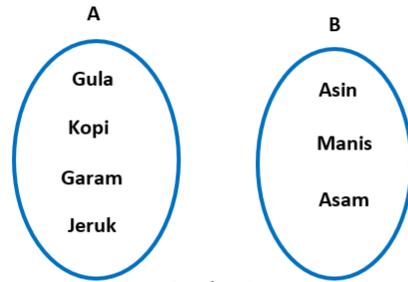


Pada gambar di atas, Gula be-relasi dengan Manis, karena rasa Gula adalah manis. Garam tidak memiliki relasi karena pada himpunan Rasa, karena garam tidak manis.

Relasi Gula dan Manis dituliskan dengan: Gula \mathbb{R} Manis.

Tugas Berpasangan!

- Himpunan A yang beranggotakan Gula, Kopi, Garam dan jeruk serta Himpunan B yang beranggotakan Asin, Manis, Asam seperti pada Gambar 1!



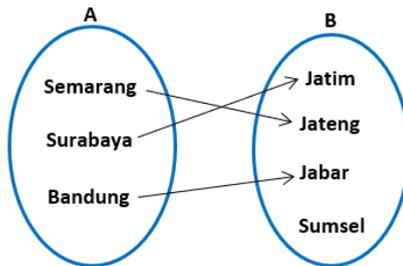
Gambar 1

- Bagaimanakah bentuk diagram relasi yang menggambarkan benda dan rasanya? Apa yang kalian temukan?
- Perhatikan: $A := \{3, 4, 7, 9\}$ dan $B := \{2, 4, 6, 8\}$.
 - Bagaimanakah bentuk diagram yang menggambarkan relasi “Kurang dari” dari himpunan A ke himpunan B?
 - Apa yang kalian temukan?

Contoh 5: Memahami Konsep Fungsi

Perhatikan!

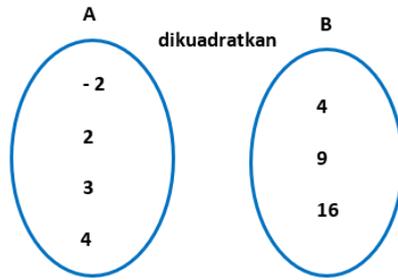
Perhatikan relasi “IBUKOTA DARI” dari Himpunan A dan himpunan B berikut!



- Setiap anggota himpunan A **memiliki tepat 1 kawan** di himpunan B. (walaupun ada anggota di B yang tidak memiliki kawan)
- Relasi yang demikian disebut dengan **FUNGSI**.

Tugas Berpasangan!

Perhatikan Himpunan A dan himpunan B seperti pada gambar 4 berikut ini!



Menurut kalian, apakah relasi dari A ke B merupakan fungsi? Mengapa?

DISKUSIKAN

1. Perhatikan Gambar 1, LKPD 1. Apakah diagram panah tersebut merupakan fungsi? Mengapa?
2. Bagaimanakah kalian mengatakan relasi dari himpunan A ke himpunan B merupakan fungsi?

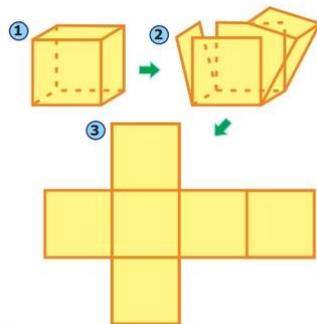
Pembahasan: Pada contoh 4 dan 5 di atas, siswa merepresentasikan simbol aljabar menjadi sebuah pengetahuan. Ini adalah LK yang akan mendorong representasi simbol dan karakter menjadi bahasa dan pemahaman siswa

Contoh 6: Jaring-Jaring Kubus

Perhatikan!

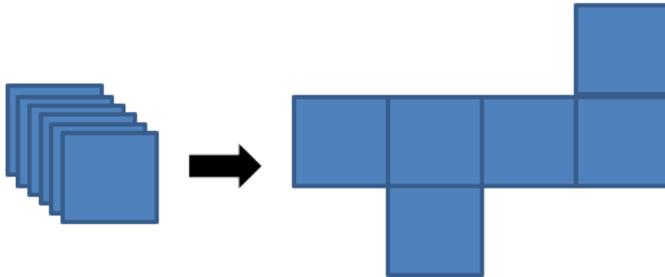
Sebuah kubus, jika diiris pada rusuknya, akan dapat dibuka dan diletakkan pada satu bidang datar menjadi jaring-jaring kubus.

Jaring-jaring kubus adalah bangun datar gabungan dari 6 persegi, yang jika dirangkai, direkatkan pada sisi-sisi persegi tersebut, akan terbentuk kubus.



Tugas Kelompok!

Diberikan 6 buah persegi!



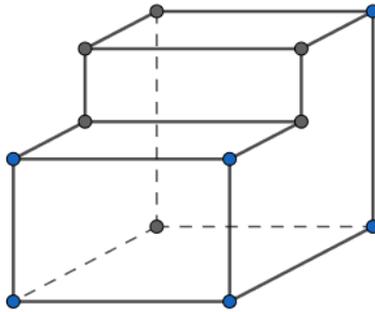
- Susunlah 6 persegi tersebut menjadi sebuah jaring-jaring kubus! (Susunan di sebelah kanan gambar adalah salah satu contohnya). Gambarkan susunan tersebut pada kertas bertitik yang telah disediakan!
- Apakah semua susunan 6 persegi dapat dirangkai menjadi kubus?
- Temukan sebanyak-banyaknya jaring-jaring kubus berbeda!

Pembahasan: siswa akan melakukan representasi gambar pada saat membaca informasi. Ia akan mengubah informasi dari gambar menjadi bahasa dan pemahaman.

Contoh 7: Gabungan Bangun Ruang**Perhatikan!**

Gabungan Bangun ruang adalah bangun ruang yang terdiri atas beberapa bangun ruang yang direkatkan pada salah satu sisinya.

Berikut ini adalah contoh gabungan bangun ruang.

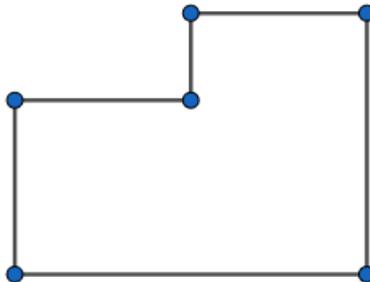


Tugas kelompok!

Tugas 1.

Gambarkan bangun tersebut pada kertas berpetak sehingga tampak dari bawah, atas, dapan, belakang dan samping!

Perhatikan contoh penampang bangun yang dilihat dari sebelah samping kanan benda.



Tugas 2.

Bagaimanakah luas permukaan gabungan bangun ruang tersebut?

Pembahasan: Pada contoh 7, siswa tidak hanya melakukan proses representasi, namun mengembangkan kemampuan keruangan. Representasi matematis dalam bentuk imajinasi bentuk bangun jika dilihat dari samping, akan mendorong kemampuan keruangan pada bagian spatial orientation (Prabowo & Ristiani, 2011).

Contoh 8: Pangkat dan Bentuk Akar

Perhatikan!

Perpangkatan adalah perkalian berulang dari suatu bilangan yang sama. Bilangan pokok dalam suatu perpangkatan disebut basis. Banyaknya bilangan pokok yang dikalikan secara berulang disebut eksponen (pangkat)

Langkah Kerja

1. Lipatlah kertas dengan ukuran sama besar yaitu pada sumbu simetris lipatnya!
2. Guntilah hasil dari lipatan tersebut!
3. Ada berapa banyak kertas dari hasil guntingan tersebut?
4. Tumpuklah kertas hasil guntingan kemudian lipatlah menjadi sama besar kembali!
5. Lakukan kembali langkah 2 dan langkah 3!
6. Lakukan langkah 1 sampai langkah 4 sampai pada lipatan ke-5 secara bergiliran!
7. Isilah percobaan tersebut pada tabel dibawah!

Lipatan Ke-	Hasil Guntingan Kertas
1	
2	
3	
4	
5	

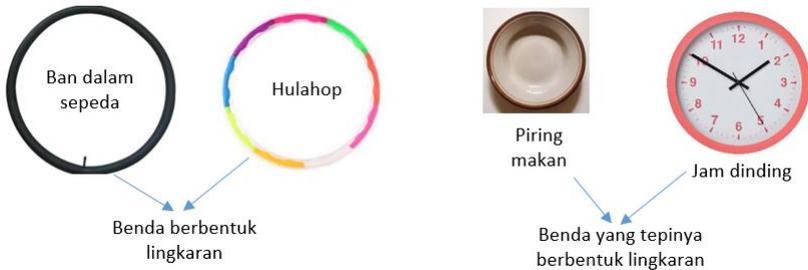
Kesimpulan

1. Definisi bilangan berpangkat dari percobaan tersebut adalah ...
2. Notasi bilangan berpangkat dari percobaan tersebut adalah ...

Pembahasan: Pada contoh 8, representasi simbol menjadi salah satu hal yang paling dominan. Pengetahuan akan terbentuk setelah siswa melakukan aktivitas sesuai pada LK tersebut.

Contoh 9: Menemukan Lingkaran

Perhatikan contoh benda berbentuk lingkaran dan yang tepinya berbentuk lingkaran sebagai berikut:



Tugas Berpasangan!

Temukanlah benda benda disekitarmu yang berbentuk lingkaran atau yang tepinya berbentuk lingkaran. Tuliskan pada tabel dibawah ini!

NO	BENDA BERBENTUK LINGKARAN	
	RUANG KELAS	LINGKUNGAN SEKOLAH
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Diskusikan:

1. Apakah kelereng ada pada daftar di atas?
2. Apakah semua benda yang berbentuk bulat adalah lingkaran ?
diskusikan bersama kelompok ananda

Contoh 10: Unsur Lingkaran

Ayo, Temukan unsur lingkaran dengan seni melipat kertas!

Alat dan bahan : kertas HVS dengan 3 warna berbeda ,Karton, gunting, penggaris, pena dan piring kecil berbentuk lingkaran.

Langkah kerja

Letakkan piring berbentuk lingkaran diatas kertas HVS, dengan menggunakan pena garis bagian luar kertas HVS sehingga berbentuk lingkaran kemudian gunting garis tersebut hingga membentuk sebuah lingkaran.

1. Lipatlah Lingkaran kertas sehingga seluruh penggirannya berimpit semua, Bukalah kembali lipatan tersebut dan buatlah garis pada bekas lipatan lingkaran. Lipat kembali lingkaran kertas tersebut, kemudian lipat lagi hingga 2 kali lipatan. Buka kembali lipatan tersebut, kemudian buatlah garis pada seluruh lipatan yang ditemukan



Apa yang dapat Ananda amati tentang garis tersebut? Berapa unsur lingkaran yang Ananda temukan ?

2. Ambil kertas lingkaran lain yang berwarna dan lipat dua kertas tersebut, kemudian buka lagi dan lipat dua lagi ditempat yang berbeda, kemudian buat lagi garis pada lipatan itu.



Apa yang dapat Ananda amati ? Berapa unsur lingkaran yang Ananda temukan?

3. Ambil kertas lingkaran lain yang berwarna dan lipatlah beberapa kali kertas lingkaran tersebut, kemudian buatlah garis pada bekas lipatan tadi lakukan secara berulang hingga garis memenuhi lingkaran tersebut



Apa yang dapat ananda amati? Berapa unsur lingkaran yang Ananda temukan?

4. Apa kesimpulan yang ananda peroleh dengan menggabungkan hasil percobaan no. 1, 2 dan 3?

Pembahasan: Pada contoh 9 dan 10, representasi bahasa akan dialami oleh siswa setelah melakukan berbagai aktivitas yang ada pada LK tersebut.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ditujukan kepada organisasi di bawah, yang sebagian isi dari Book Chapter ini ditulis oleh penulis, kolaborasi dengan konsultan dan dosen perguruan tinggi mitra, dibiayai oleh:

1. Project PRIORITAS (2012-2017) oleh USAID.
2. Project PINTAR (2018-sekarang) oleh Tanoto Foundation.

Daftar Pustaka

- Audi, R., 2011. Epistemology: A Contemporary Introduction to the Theory of Knowledge. In *Epistemology: A Contemporary Introduction to the Theory of Knowledge* (Third Edit). Routledge.
- Brousseau, G., 2002. Epistemological Obstacles, Problems, and Didactical Engineering. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield (Eds.), *Theory of Didactical Situations in Mathematics (Didactique des Mathématiques), 1970–1990*, pp.79–117. Kluwer Academic Publishers.
- Clements, D.H., 2011. Learning Trajectories: Foundations for Effective, Research-Based Education. *PME-NA 2011 Proceedings*, pp.365–372.

- Encyclopedia of the Sciences of Learning. Mental Activities of Learning.
- Gee, E., Fauzan, A., & Atmazaki, A., 2018. Designing Learning Trajectory for Teaching Sequence and Series Using RME Approach to Improve Students' Problem Solving Abilities. In R. Johar, C. Morina, Anwar, Mailizar, Elizar, C. Khairunnisak, R. C. I. Prahmana, W. Artika, L. Vitoria, L. Khairi, S. Maulina, & M. Ulfa (Eds.), *Journal of Physics: Conference Series*, 1088, from *The 6th South East Asia Design Research International Conference (SEA-DR IC) 2018*, pp. 1–6. IOP Publishing.
- Goldin, G., 2002. Representation In Mathematical Learning And problem Solving. In L. D English (ED). *International Research in Mathematical Education (IRME)*, 39(1), pp.197-218.
- Hwang, W.-Y., Chen, N.-S., Dung, J.-J., & Yang, Y.-L., 2007. Multiple Representation Skills and Creativity Effects on Mathematical Problem Solving using a Multimedia Whiteboard System. *Educational Technology & Society*, 10(2), pp.191-212.
- Kalathil, R.R., & Sherin, M.G., 2000. Role of Students' Representations in the Mathematics Classroom. In B. Dalam Fishman & S. O'Connor-Divelbiss (Eds.), *Fourth International Conference of the Learning Sciences*, pp.27-28). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Mainali, B., 2021. Representation in Teaching and Learning Mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, 9(1), pp.1-21.
- NCTM., 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*. USA: NCTM
- Orton, A., 2004. *Learning Mathematics: Issues, Theory and Classroom Practice*. Caseel: University of Leeds Centre for Studies Science and Mathematics Education
- Prabowo, A., & Ristiani, E., 2011. Rancang Bangun Instrumen Tes Kemampuan Keruangan Pengembangan Tes Kemampuan

- Keruangan Hubert Maier dan Identifikasi Penskoran Berdasar Teori Van Hiele. *Kreano, Jurnal Matematika Kreatif-Inovatif*, 2(2), pp.72–87.
- Surya, E., Sabandar, J., Kusumah, Y.S., & Darim., 2013. Improving of Junior High School Visual Thinking Representation Ability in Mathematical Problem Solving by CTL. *IndoMS. J.M.E.* 4(1), pp.113-126.
- Suryadi, D., 2019. *Landasan Filosofis Penelitian Desain Didaktis (DDR)*. Gapura Press.
- Suryadi, D., 2021. *Mengenal Didactical Design Research (DDR)*.
- Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H., & Edgington, C., 2012. Learning Trajectory Based Instruction: Toward a Theory of Teaching. *Educational Researcher*, 41(5), pp.147–156.
- Zevenbergen, R., Dole, S. & Wright, R.J., 2004. *Teaching Mathematics in Primary Schools*. Australia: Allen & Unwin.